

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

13. travnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 19. travnja 2010. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(10 bodova.) Napišite definiciju **broja uvjetovanosti** kvadratne matrice A reda n . Što “mjeri” taj broj u teoriji perturbacija linearnih sustava i koja je uloga tog broja za točnost izračunatog rješenja sustava?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & 14 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 14 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -18 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = \sqrt{2x + 1}$$

interpoliramo polinomom p_3 stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži čvorova u intervalu $[0, 2]$.

- (a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 .
- (b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 2]$.
- (c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 0.75$ i pripadnu pravu pogrešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Nađite parametre s_i potpunog kubičnog splajna s koji interpolira funkciju

$$f(x) = (x + 1) \sin x$$

na ekvidistantnoj mreži s $n = 4$ podintervala na intervalu $[0, \pi/2]$. Izračunajte vrijednosti tog splajna, njegove prve i druge derivacije u točki $x = \pi/6$ i pripadne prave pogreške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = \frac{a}{x} + b$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

| | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y_i | 2.0 | 1.4 | 1.2 | 1.1 | 1.0 |

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S .

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

13. travnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 19. travnja 2010. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(10 bodova.) Napišite precizno kako se bira pivotni element kod **potpunog** pivotiranja u Gausovim eliminacijama, odnosno, LR faktorizaciji. Opišite ukratko osnovne korake kako se rješava linearni sustav $Ax = b$, kad izračunamo LR faktorizaciju matrice A s **potpunim** pivotiranjem.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & -7 \\ 0 & 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \\ -27 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$$

interpoliramo polinomom p_3 stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži čvorova u intervalu $[1, 2]$.

- (a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 .
- (b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[1, 2]$.
- (c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1.25$ i pripadnu pravu pogrešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Nađite parametre s_i kubičnog splajna s koji interpolira funkciju

$$f(x) = xe^{x-1}$$

na ekvidistantnoj mreži s $n = 2$ podintervala na intervalu $[0, 1]$. Rubni uvjeti za splajn su $s'' = f''$ u rubovima intervala. Izračunajte vrijednosti tog splajna, njegove prve i druge derivacije u točki $x = 2/3$ i pripadne prave pogreške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = a \ln x + b$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

| | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y_i | 0.5 | 1.7 | 2.4 | 2.9 | 3.3 |

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S .

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

13. travnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 19. travnja 2010. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(10 bodova.) Napišite definiciju **pivotnog rasta** (faktora rasta) u procesu Gaussovih eliminacija za rješenje linearnog sustava $Ax = b$, gdje je A regularna kvadratna matrica reda n . Koja je uloga tog broja za točnost izračunatog rješenja sustava? Što znate o ponašanju pivotnog rasta u eliminacijama **bez** pivotiranja i s **parcijalnim** pivotiranjem?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Korištenjem faktORIZACIJE Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

interpoliramo polinomom p_3 stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži čvorova u intervalu $[2, 3]$.

- (a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 .
- (b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[2, 3]$.
- (c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 2.25$ i pripadnu pravu pogrešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Nađite parametre s_i kubičnog splajna s koji interpolira funkciju

$$f(x) = (x + 1) \cos x$$

na ekvidistantnoj mreži s $n = 2$ podintervala na intervalu $[0, \pi/2]$. Rubni uvjeti za splajn su $s'' = f''$ u rubovima intervala. Izračunajte vrijednosti tog splajna, njegove prve i druge derivacije u točki $x = \pi/3$ i pripadne prave pogreške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = a\sqrt{x} + b$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

| | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y_i | 1.7 | 2.4 | 2.9 | 3.2 | 3.6 |

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S .

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

13. travnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 19. travnja 2010. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(10 bodova.) Kako se radi **potpuno** pivotiranje u faktorizaciji Choleskog? Napišite precizno kako se tada bira pivotni element u pojedinom koraku faktorizacije. Opišite ukratko osnovne korake kako se rješava linearni sustav $Ax = b$, kad izračunamo faktorizaciju Choleskog simetrične pozitivno definitne matrice A s **potpunim** pivotiranjem.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 18 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

interpoliramo polinomom p_3 stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži čvorova u intervalu $[1, 3]$.

- (a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 .
- (b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[1, 3]$.
- (c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1.75$ i pripadnu pravu pogrešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Nađite parametre s_i potpunog kubičnog splajna s koji interpolira funkciju

$$f(x) = x \ln(x + 1)$$

na ekvidistantnoj mreži s $n = 4$ podintervala na intervalu $[0, 1]$. Izračunajte vrijednosti tog splajna, njegove prve i druge derivacije u točki $x = 1/3$ i pripadne prave pogreške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

13. travnja 2010.

(10 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = ae^{-x} + b$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

| | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y_i | 3.2 | 1.9 | 1.5 | 1.3 | 1.2 |

 .

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S .

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!